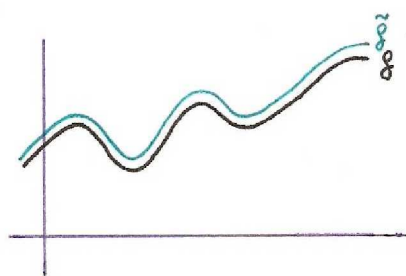


TEMA 3: APROXIMACIÓN DE FUNCIONES: MEJOR APROXIMACIÓN.

La idea del problema de mejor aproximación es básicamente la misma que en interpolación. Tendremos una función a aproximar, un espacio donde buscar dicha aproximación y un criterio para realizarla. Este criterio vendrá dado por una distancia.



Ahora la aproximación no coincidirá exactamente con la función original, sino que será semejante en algún sentido (distancia).

EJEMPLO: Tenemos un espacio vectorial E y un subconjunto U .

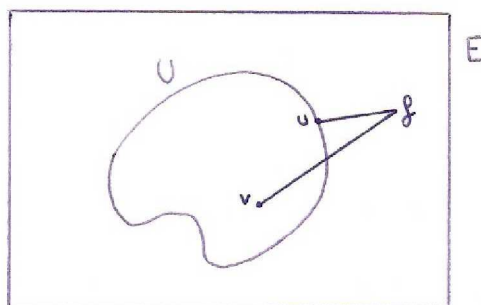
Tenemos una función $f / f \in E$.

E espacio métrico.

Encontrar un elemento $u \in U / d(u, f) \leq d(v, f) \quad \forall v \in U$



La distancia de u a f debe ser lo menor posible.



Un ESPACIO MÉTRICO es un espacio vectorial en el que se ha definido una métrica.

Una MÉTRICA es una aplicación que coge dos puntos de un espacio y les asigna un número no negativo, que es la distancia (separación) entre ellos: $d(x, y)$.

• Definición.- Sea (E, d) espacio métrico, una función $f \in E$ y U subconjunto de E .

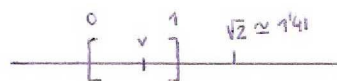
Se dice que $u \in U$ es la MEJOR APROXIMACIÓN de f en U si $d(u, f) \leq d(v, f) \quad \forall v \in U$.

NO SIEMPRE HAY
MEJOR APROXIMACIÓN.

EJEMPLO: $E = \mathbb{R}$, $f = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$$U = [0, 1]$$

$$d(x, y) = |x - y|$$



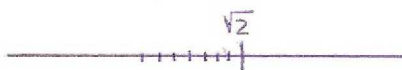
Tenemos un número real ($\sqrt{2}$). ¿Cuál será la mejor aproximación de $\sqrt{2}$ en el intervalo U ?

$$\underline{u = 1} ; |\sqrt{2} - 1| = d(1, \sqrt{2}) \leq d(v, \sqrt{2}) \quad \forall v \in [0, 1]$$

1 es la mejor aproximación de $\sqrt{2}$
en el intervalo $[0, 1]$

EJEMPLO: $f = \sqrt{2}$

$U = \mathbb{Q} \rightarrow$ Ahora queremos aproximar $\sqrt{2}$ mediante un número racional.



$\exists \{u_n\} \subset \mathbb{Q} \quad d(u_n, \sqrt{2}) \rightarrow 0 \rightarrow$ Existe una sucesión de números racionales de forma que la distancia tiende a 0.

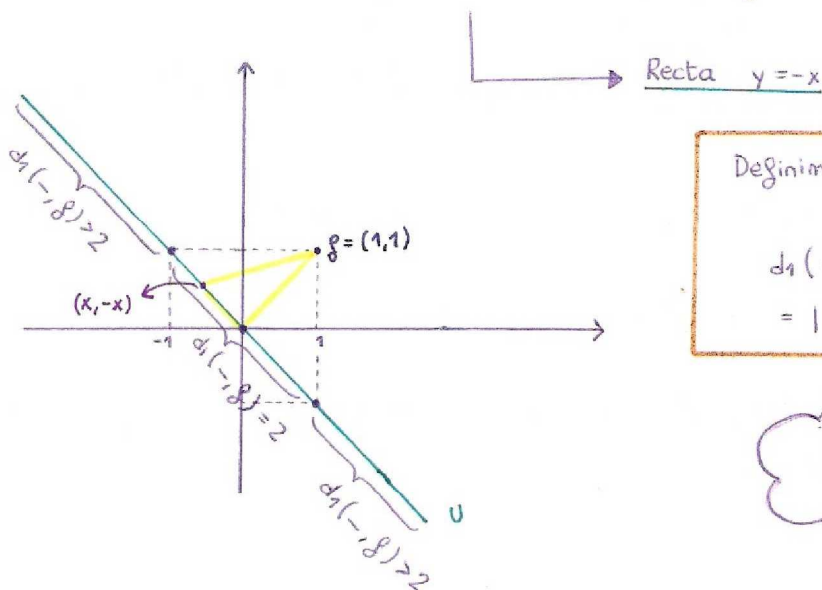
$$\underbrace{d(u_1, \sqrt{2})}_{=0} \leq \underbrace{d(u_n, \sqrt{2})}_{=0} \Rightarrow \underline{u = \sqrt{2}}$$

NO HAY MEJOR
APROXIMACIÓN

PUEDE OCURRIR QUE HAYA MÁS DE UNA
MEJOR APROXIMACIÓN.

EJEMPLO: Nos encontramos en el plano \mathbb{R}^2 . Tomamos un subespacio de \mathbb{R}^2 (una recta) y un punto no incluido en ella (por ejemplo, el $(1,1)$)
¿Hay mejor aproximación del $(1,1)$ en el subespacio U ?

$$E = \mathbb{R} \quad U = \{ (x,y) / x+y=0 \} \quad g = (1,1)$$

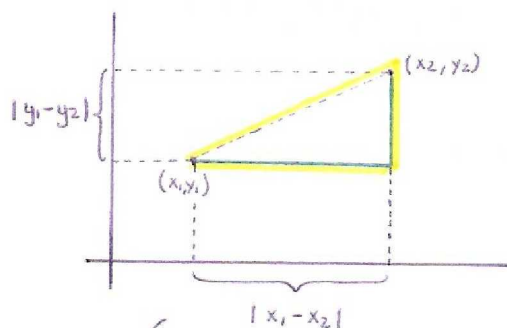


Definimos la métrica (distancia):

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

(\mathbb{R}^2, d_1) Espacio métrico

Para ver si hay mejor aproximación del punto $(1,1)$ desde el subespacio (recta) vamos a tomar un punto genérico de la recta: el punto $(x, -x)$. La distancia entre $(1,1)$ y $(x, -x)$ debe ser lo menor posible:



DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS.

(Triángulo extraído del dibujo principal).

$$u = (x, -x) \quad g = (1,1)$$

$$d_1(u, g) = d_1((x, -x), (1,1)) =$$

$$= |x-1| + |-x-1| =$$

$$= |x-1| + |x+1| \rightarrow \text{Mínimo}$$

¿x?

La distancia $|x-1| + |x+1|$ debe ser lo menor posible. ¿Quién será "x" para que esto se cumpla?

* 1^{er} CASO: $x \leq -1 \rightarrow$ Por tanto también $x \leq 1 \rightarrow x-1 \leq 0, x+1 \leq 0$

$$|x-1| + |x+1| = -(x-1) - (x+1) = -2x \geq -2(-1) = 2$$

\uparrow \uparrow
 $x \leq -1$ x

En este tramo de la recta la distancia entre un punto $(x, -x) \in U$ y el $(1,1)$ es $-2x$.

La distancia mínima es 2, y se consigue cuando $x = -1$.

* 2^o CASO: $-1 \leq x \leq 1 \rightarrow x-1 \leq 0, x+1 \geq 0$

$$|x-1| + |x+1| = -x+1 + x+1 = 2$$

$\forall (x, -x) \in U, -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow d_1((x, -x), g) = 2 \rightarrow$ La distancia es constante.

* 3^{er} CASO: $x \geq 1 \rightarrow x \geq -1 \rightarrow x-1 \geq 0, x+1 \geq 0$

$$|x-1| + |x+1| = x-1 + x+1 = 2x \geq 2 \cdot 1 = 2$$

\downarrow \uparrow
 $x \geq 1$ x

En este tramo de la recta la distancia entre un punto $(x, -x) \in U$ y el $(1,1)$ es $2x$.

La distancia mínima es 2, y se consigue cuando $x = 1$.

* CONCLUSIÓN: Hay ∞ puntos que son mejor aproximación:

$$|x-1| + |x+1| = d_1((x, -x), g) = 2; \quad \underbrace{u = (x, -x); x \in [-1, 1]}$$

Mejor aproximación de g .

Si planteamos el mismo problema, pero usamos la distancia euclídea (d_2) no ocurre lo mismo.

Longitud del segmento
que los une

DISTANCIA EUCLÍDEA (Hipotenusa):

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d_2((x, -x), (1, 1)) = \sqrt{(x-1)^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (x+1)^2}$$

Para que d_2 sea mínimo,
debe ser mínimo el radicando.

$$y = (x-1)^2 + (x+1)^2 \rightarrow \text{Minimizar.}$$

$$\left. \begin{aligned} y' &= 2(x-1) + 2(x+1) = 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ y'' &= 4 > 0 \rightarrow \text{Es un mínimo} \end{aligned} \right\} x=0 \text{ minimiza } d_2.$$

Ahora sí hay una única mejor aproximación (el punto (0,0)).

(30/11/2007)

1. CONCEPTOS.

• DISTANCIA. - Aplicación lineal:

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

(Al par (E, d) se le denomina ESPACIO MÉTRICO).

Propiedades:

$$\text{i) } d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E \\ = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{ii) } d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Simetría})$$

$$\text{iii) } d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in E \quad (\text{Desigualdad triangular})$$

• NORMA.- Aplicación de un espacio vectorial en \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

(Al par $(E, \|\cdot\|)$ se le denomina ESPACIO NORMADO).

Propiedades:

$$i) \|x\| > 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$ii) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in E$$

$$iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E \quad (\text{Desigualdad triangular}).$$

Toda norma induce una distancia mediante la aplicación:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

↳ Por tanto, todo espacio normado es también espacio métrico.

• PRODUCTO EUCLÍDEO.- Aplicación lineal:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Propiedades:

$$i) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in E \quad (\text{Simetría})$$

$$ii) \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$$

$$iii) \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ahora, a partir de cualquier cosa que sea producto escalar podremos definir una norma y una distancia:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

• RELACIÓN ENTRE ESPACIOS EUCLÍDEOS, NORMAS Y DISTANCIAS.

$\|\cdot\|$ $d(\cdot, \cdot)$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$(E, \|\cdot\|)$ espacio vectorial normado. $\left. \begin{array}{l} d(x, y) = \|x - y\| \end{array} \right\} \Rightarrow (E, d)$ espacio métrico.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio euclídeo $\left. \begin{array}{l} \text{espacio prehilbertiano} \\ \text{espacio con producto interno} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \end{array}$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio euclídeo

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (\text{Norma de } x)$$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio euclídeo REAL (\mathbb{R})

ESPACIO EUCLÍDEO \Rightarrow ESPACIO NORMADO \Rightarrow ESPACIO MÉTRICO.

\swarrow (Unidireccional) \nwarrow

En el momento en que tengamos un espacio prehilbertiano sabemos que tenemos un espacio normado y también uno métrico. Sin embargo, sin embargo, no todas las distancias vienen de una norma, ni todas las normas vienen de un producto escalar.

* EJEMPLO:

* PRODUCTO ESCALAR : $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

Me dan el producto escalar (euclídeo). A partir de ahí puedo calcular normas y distancias.

* NORMA : $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f(x) \cdot f(x) dx}$; $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$

$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$

* DISTANCIA : $d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}$

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle} = \left(\int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) - g(x)) dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

2. TEOREMA.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio euclídeo, H subespacio de E , $\dim H < \infty$.

Entonces, $\forall f \in E$ existe una única $u \in H$ tal que u es la mejor aproximación de f en H :

$$d(u, f) \leq d(v, f) \quad \forall v \in H$$

3. TEOREMA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL.

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio euclideo. Sea H subespacio de E , $\dim H = n < +\infty$.

↳ Nos situamos en las condiciones del teorema anterior.
Con esto sabemos que para cada elemento de E existe una única mejor aproximación.

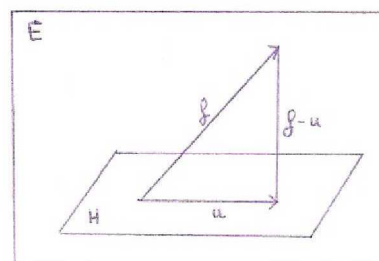
Sea $g \in E$. Entonces:

$u \in H$ es la mejor aproximación de g en $H \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \langle g-u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$$

Lo que quiere decir este teorema es que la diferencia entre g y u ($g-u$) debe ser perpendicular a todo elemento de H . ¿Por qué?

• Si me estoy limitando a moverme en el subespacio H , nunca podré avanzar en una dirección perpendicular a H , ya que implicaría "salirme" de H .



• $(g-u)$ es lo que le falta a la mejor aproximación u para ser como g .

Por tanto, lo que dice el teorema es: El camino que le falta a la mejor aproximación u para ser como g ($g-u$) es inaccesible (perpendicular) para elementos de H , es decir, que la mejor aproximación u ha hecho todo lo que estaba en su mano para parecerse a g . Cualquier intento de mejora adicional implicaría moverse perpendicularmente a H (salirse de H).

Si en un problema me dan u y me preguntan: ¿es la mejor aproximación?, lo que hago es comprobar si se cumple lo que dice este teorema.

* Demostración:

← Si $\langle f-u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H \rightarrow$ ¿es u mejor aproximación de f en H ?

Cogemos un v cualquiera en H , y hallamos su distancia a f , que al tener definido un producto escalar vendrá dada por:

$$d(f, v)^2 = \|f-v\|^2 = \langle f-v, f-v \rangle$$

Sumo y resto u :

$$d(f, v)^2 = \langle f-v, f-v \rangle = \langle f-v+u-u, f-v+u-u \rangle =$$

$$= \langle (f-u) + (u-v), (f-u) + (u-v) \rangle =$$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

$$= \langle f-u, f-u \rangle + \langle f-u, u-v \rangle + \langle u-v, f-u \rangle + \langle u-v, u-v \rangle =$$

$$= \|f-u\|^2 + \|u-v\|^2 + 2\langle f-u, u-v \rangle$$

Si u cumple que $f-u$ es perpendicular a cualquier elemento de H , entonces el último término se anula ya que $f-u$ y $u-v$ son perpendiculares ($u-v \in H$ y $f-u$ es \perp a H).

→ El producto escalar de 2 vectores perpendiculares siempre es 0.

$$d(f, v)^2 = \|f-u\|^2 + \|u-v\|^2 = d(f, u)^2 + d(u, v)^2$$

$$d(f, v) \geq d(f, u) \quad \forall v \in H$$

→ u es la mejor aproximación.

→ Si u es mejor aproximación de f en $H \rightarrow \dot{c} \langle f-u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$?

Supongamos que u fuese mejor aproximación ($f-u \perp H$), pero que aún así existiese $w \in H$ que no fuese perpendicular a $f-u$:

$$\exists w \in H / \langle f-u, w \rangle \neq 0$$

Veremos que la existencia de dicho w nos lleva a un absurdo.

Al ser H un subespacio vectorial, como $u, w \in H$, el elemento $h = u + \alpha w \in H$.
Calculamos su distancia a f :

$$d(f, h)^2 = d(f, u + \alpha w)^2 =$$

$$= \|f - u - \alpha w\|^2 = \langle f - u - \alpha w, f - u - \alpha w \rangle = \text{Lo agrupo de otra forma.}$$

$$= \langle (f-u) + (-\alpha w), (f-u) + (-\alpha w) \rangle = \text{Prop. distributiva.}$$

$$= \langle f-u, f-u \rangle + \langle f-u, -\alpha w \rangle + \langle -\alpha w, f-u \rangle + \langle -\alpha w, -\alpha w \rangle =$$

$$= \|f-u\|^2 + \|-\alpha w\|^2 + 2 \langle f-u, -\alpha w \rangle =$$

$$= \|f-u\|^2 + \alpha^2 \|w\|^2 - 2\alpha \langle f-u, w \rangle$$

α puede ser cualquier número real, así que tomo: $\alpha = \frac{\langle f-u, w \rangle}{\|w\|^2}$

$$\text{Entonces: } d(f, h)^2 = \|f-u\|^2 + \frac{\langle f-u, w \rangle^2}{\|w\|^2} - 2 \frac{\langle f-u, w \rangle^2}{\|w\|^2} =$$

$$= \|f-u\|^2 - \frac{\langle f-u, w \rangle^2}{\|w\|^2} = \|f-u\|^2 - \text{"algo positivo"}$$

Por tanto: $d(f, h) < d(f, u)$ siendo h la mejor aproximación en lugar de u .

Contradicción con la hipótesis inicial.

Así que dicho w no puede existir.

CON ESTE TEOREMA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL
PODREMOS HALLAR LA MEJOR APROXIMACIÓN DE CUALQUIER ELEMENTO,
SIEMPRE QUE ESTEMOS EN UN ESPACIO EUCLÍDEO Y BUSQUEMOS LA
MEJOR APROXIMACIÓN EN UN SUBESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA.

4. CONSTRUCCIÓN DE LA MEJOR APROXIMACIÓN.

Vamos a ver cómo utilizar el teorema anterior para hallar la mejor aproximación.

Sea E espacio euclídeo y H subespacio.

Puede que E sea ∞ ,
pero H debe ser finito.

Como H es un subespacio vectorial de dimensión finita, estará generado por una base B con un número finito de elementos:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Tenemos $f \in E$ y buscamos $u \in H$ / u es mejor aproximación de f .

La mejor aproximación pertenece a H , por lo que podemos ponerla como combinación lineal de los elementos de la base:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{¿} \alpha_i \text{?}$$

Una vez que calcule los α_i , tendré u .

Pero... ¡ATENCIÓN! $(f-u)$ debe ser perpendicular a todo elemento de H .
Para asegurar que esto se cumple, debemos hacer $(f-u)$ perpendicular a los elementos de la base de H :

$$\begin{aligned} \langle f-u, v \rangle &= 0 \quad \forall v \in H \rightarrow \langle f-u, v_j \rangle = 0 \quad j = 1, \dots, n \\ &\parallel \\ &\langle f, v_j \rangle - \langle u, v_j \rangle \end{aligned}$$

$$\langle f - v_j, v_j \rangle = \langle u, v_j \rangle = 0 \quad j = 1..n$$

$$\langle f - v_j \rangle = \langle u, v_j \rangle = 0 \quad j = 1..n$$

$$\langle f - v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_j \rangle \quad j = 1..n$$

$$\alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle \quad j = 1..n$$

Sistema lineal donde los α_i son las n incógnitas ($\alpha_1 \dots \alpha_n$) y tenemos n ecuaciones ($j = 1..n$)

¿ α_i ?

El sistema desarrollado es:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \\ \alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \alpha_n \langle v_1, v_n \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_n \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle \end{array} \right\} \text{ SISTEMA DE GRAM.}$$

Sistema de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_n, v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1, v_n \rangle & \langle v_2, v_n \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, v_1 \rangle \\ \langle f, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

↑
MATRIZ DE GRAM

$$\Delta = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_n, v_2 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1, v_n \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{vmatrix}$$

DETERMINANTE DE GRAM

↳ Sabemos que $\Delta \neq 0$ porque \exists solución única (lo sabemos por los teoremas estudiados).
↳ Mejor aproximación única.

* EJEMPLO: Se considera el espacio E de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.

Se define el siguiente producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

E con el producto
definido en el
problema

donde $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es espacio euclídeo.

Se quiere calcular la mejor aproximación de la función $f(x) = x^2$, $f \in E$ (es continua) en $H = \mathcal{P}_1$ (polinomios de grado ≤ 1).

$$f(x) = x^2 \quad \downarrow$$

$u = ax + b$ es mejor aproximación
de f en \mathcal{P}_1 .

Calcular a y b .

(Resuelto el próximo día: pág 58).

5. BASE ORTOGONAL. $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio vectorial euclídeo.

CUANDO DOS ELEMENTOS SON ORTOGONALES
SU PRODUCTO ES CERO:

$$f, g \in E \text{ ortogonales, } \langle f, g \rangle = 0$$

Dada una base del subespacio H , la mejor aproximación u se puede escribir como combinación lineal de sus elementos. Como bases de H hay muchas, nos interesa una que facilite la resolución del sistema lineal. La matriz del sistema sería diagonal si utilizamos una base ortogonal.

BASE ORTOGONAL: SUS ELEMENTOS SON
PERPENDICULARES ENTRE SÍ.

$$\rightarrow B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ortogonal} \\ \langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j$$

A partir de cualquier base de H es posible construir una base ortogonal siguiendo el proceso de Gram-Schmidt:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \tilde{B} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n\} \text{ Base ortogonal.}$$

Si la base es ortogonal, ocurre lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \\ \alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \alpha_1 \langle v_1, v_n \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_n \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle \end{array} \right\} \text{ SISTEMA DIAGONAL.}$$

El sistema quedaría:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle f, v_1 \rangle \\ \alpha_2 \langle v_2, v_2 \rangle &= \langle f, v_2 \rangle \\ &\vdots \\ \alpha_n \langle v_n, v_n \rangle &= \langle f, v_n \rangle \end{aligned} \right\} \text{¿}\alpha_i\text{?}$$

Podemos calcular de manera inmediata las incógnitas α_i :

$$\alpha_1 = \frac{\langle f, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle f, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle}$$

\vdots

$$\alpha_n = \frac{\langle f, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle}$$

$$\alpha_i = \frac{\langle f, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle f, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \quad i=1 \dots n$$

Como la mejor aproximación $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ tenemos la siguiente expresión:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \frac{\langle f, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

→ EXPRESIÓN PARA LA MEJOR APROXIMACIÓN
(UTILIZANDO BASE ORTOGONAL).

E, f $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de H .

Para hallar la mejor aproximación de f en H tenemos 2 opciones:

1º) Usar $B \rightarrow$ Sistema más complicado

2º) Obtener \tilde{B} ortogonal \rightarrow Sistema más sencillo
más dificultad

6. BASE ORTONORMAL.

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$1^\circ) \text{ Ortogonal : } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

$$2^\circ) \text{ Norma } = 1: \quad \forall i \quad \|v_i\| = 1 \quad \|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ) \text{ Ortogonal : } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j \\ 2^\circ) \text{ Norma } = 1: \quad \forall i \quad \|v_i\| = 1 \quad \|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i \rangle \end{array} \right\} \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1 \dots n$$

ORTONORMAL = ORTOGONAL + NORMA=1

Por lo tanto, cuando la base es ortonormal, la expresión para la mejor aproximación es:

$$u = \sum_{i=1}^n \langle f, v_i \rangle \cdot v_i$$

EXPRESIÓN PARA LA
MEJOR APROXIMACIÓN
(UTILIZANDO BASE ORTONORMAL)

Suma de Fourier para f .
 $\langle f, v_i \rangle$ coeficiente de Fourier.

* EJEMPLO: (Planteado el otro día: Pág 56).

Definición 1.1.1

Sea $E = C([0,1]) \rightarrow$ Funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.

$H = P_1 \rightarrow$ Polinomios de grado ≤ 1 .

Producto escalar $\rightarrow \langle g, h \rangle = \int_0^1 g(x) \cdot h(x) dx$

$$f(x) = x^2$$

$u(x) = ax + b \in H \rightarrow$ Mejor aproximación de f en P_1 .

¿a, b? \rightarrow Es lo que hay que calcular.

1ª FORMA

$u = ax + b \rightarrow$ Combinación lineal de los elementos de la base:

$$B = \{x, 1\} \text{ base de } \mathcal{P}_1 \quad \dim \mathcal{P}_1 = 2 \text{ (nº elementos de la base).}$$

Se dan las condiciones para el Tª de la Proyección Ortogonal, así que podemos aplicarlo:

$$u(x) \text{ mejor aprox. de } f(x) \Leftrightarrow \langle f-u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{P}_1$$

$$\langle f-u, x \rangle = \langle f-u, 1 \rangle = 0$$

↓

$$\langle f, x \rangle - \langle u, x \rangle = 0$$

$$\langle f, 1 \rangle - \langle u, 1 \rangle = 0$$

$$\langle u, x \rangle = \langle f, x \rangle$$

$$\langle u, 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle$$

Como $u = ax + b$, tenemos:

$$\langle ax + b, x \rangle = \langle f, x \rangle \rightarrow a \langle x, x \rangle + b \langle 1, x \rangle = \langle x^2, x \rangle$$

$$\langle ax + b, 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle \rightarrow a \langle x, 1 \rangle + b \langle 1, 1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle$$

Sistema que debemos resolver:

¿a, b?

a, b : incógnitas.

$\langle \dots \rangle$: coeficientes.

Calculamos los productos según lo definido en el enunciado:

$$\langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle 1, x \rangle = \langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1$$

$$\langle x^2, x \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Sustituimos en el sistema:

$$\begin{cases} a\langle x, x \rangle + b\langle 1, x \rangle = \langle x^2, x \rangle \\ a\langle x, 1 \rangle + b\langle 1, 1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot 12 \\ \cdot 6 \end{matrix}} \begin{cases} 4a + 6b = 3 \\ 3a + 6b = 2 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ a = 1$$

$$6b = 2 - 3 = -1$$

$$a = 1$$

$$b = -1/6$$

$$u(x) = ax + b = x - \frac{1}{6}$$

→ Este polinomio de 1er grado es la mejor aproximación de x^2 en el espacio \mathcal{P}_1 .

2ª FORMA → Utilizando BASE ORTOGONAL.

$$\mathcal{B} = \{x, 1\} \quad \tilde{\mathcal{B}} = \{v_1(x), v_2(x)\} \quad \text{Base ortogonal} \rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$v_1(x)$ y $v_2(x) \in \mathcal{P}_1$ porque forman parte de su base:

$$\begin{cases} v_1(x) = a_1x + b_1 \\ v_2(x) = a_2x + b_2 \end{cases} \quad v_1(x) = 1 \Rightarrow a_1 = 0, b_1 = 1 \rightarrow \text{Al 1er vector le puedo dar cualquier valor.}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 v_1(x) v_2(x) dx = \int_0^1 1(a_2x + b_2) dx = a_2 \cdot \frac{x^2}{2} + b_2x \Big|_0^1 =$$

↑
El 2º vector

debe cumplir esto:

debe ser perpendicular a v_1 .

$$= \frac{a_2}{2} + b_2 = 0 \quad ; \quad a_2 = -2b_2$$

Entonces la base ortogonal es:

$$\tilde{B} = \{1, -2b_2x + b_2\}$$

¿Por qué tenemos un grado de libertad a la hora de hallar b_2 ?

Porque al multiplicar/dividir un vector por un número real $\neq 0$ seguirá siendo de la base (son proporcionales).

$$b_2 = 1 \quad \tilde{B} = \{1, -2x + 1\} \quad \text{BASE ORTOGONAL.}$$

Ahora, si en lugar de fijar $v_1(x) = 1$ pongo algo genérico, tendremos:

$$v_1(x) = b_1 \quad x \neq 0$$

$$v_2(x) = a_2x + b_2 \quad / \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \rightarrow a_2 = -2b_2$$

$$B = \{b_1, -2b_2x + b_2\}$$

Tengo 2 grados de libertad, que puedo utilizar para pedir que sea ortonormal, no solo ortogonal

Para que sea ortonormal:

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \int_0^1 (v_1(x))^2 dx = \int_0^1 b_1^2 dx = b_1^2 \cdot x \Big|_0^1 = b_1^2 = \|v_1\|^2 = 1 ;$$

$$b_1^2 = 1 ; \quad \boxed{b_1 = \pm 1}$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \|v_2\|^2 = 1 = \int_0^1 (-2b_2x + b_2)^2 dx = b_2^2 \int_0^1 (-2x + 1)^2 dx =$$

$$= b_2^2 \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) dx = b_2^2 \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= b_2^2 \left(\frac{4}{3} - 2 + 1 \right) = b_2^2 \cdot \frac{1}{3} = 1 ; \quad \boxed{b_2 = \pm \sqrt{3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = \pm 1 \\ b_2 = \pm \sqrt{3} \end{array} \right\} \tilde{B} = \left\{ \overset{v_1}{1}, \overset{v_2}{-2\sqrt{3}x + \sqrt{3}} \right\}$$

BASE ORTONORMAL.

(Hay 4 bases posibles en función de los signos que coja).

Ya tenemos la base. Vamos a hallar la mejor aproximación u :

Según $B \rightarrow u(x) = ax + b$

Según $\tilde{B} \rightarrow u(x) = \alpha \cdot 1 + \beta(-2\sqrt{3}x + \sqrt{3})$

Para que $u(x)$ sea mejor aprox. se debe cumplir que $f-u$ sea perpendicular a los vectores de H (T^2 Proyección Ortogonal):

$$\langle f-u, v_1 \rangle = \langle f-u, v_2 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \rightarrow \langle \alpha \cdot 1 + \beta(-2\sqrt{3}x + \sqrt{3}), 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle =$$

$$= \alpha \underbrace{\langle 1, 1 \rangle}_1 + \beta \underbrace{\langle -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}, 1 \rangle}_0 \text{ (son } \perp \text{, son los de la base)} = \alpha$$

$$\langle u, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \rightarrow \langle \alpha \cdot 1 + \beta(-2\sqrt{3}x + \sqrt{3}), -2\sqrt{3}x + \sqrt{3} \rangle =$$

$$= \alpha \underbrace{\langle 1, -2\sqrt{3}x + \sqrt{3} \rangle}_0 \text{ (porque la base es ortogonal)} + \beta \underbrace{\langle -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}, -2\sqrt{3}x + \sqrt{3} \rangle}_1 \text{ (porque la base es ortonormal, y esto es igual a la norma).} = \beta$$

$$\alpha = \langle f, 1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \langle f, -2\sqrt{3}x + \sqrt{3} \rangle = \langle x^2, -2\sqrt{3}x + \sqrt{3} \rangle = \int_0^1 (-2\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}x^2) dx = \\ &= -2\sqrt{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \sqrt{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6} = \beta \end{aligned}$$

Hemos obtenido α y β directamente, sin necesidad de sistemas.

Sustituimos el valor de α y β en $u(x)$:

$$u(x) = \alpha \cdot 1 + \beta (-2\sqrt{3}x + \sqrt{3}) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} (-2\sqrt{3}x + \sqrt{3}) = \frac{1}{3} + x - \frac{3}{6} = x - \frac{1}{6}$$

$$u(x) = x - \frac{1}{6}$$

Como la mejor aprox. $u(x)$ es única (por los teoremas estudiados), obviamente nos sale el mismo resultado que haciéndolo de la primera forma.

En este ejercicio, como el sistema era muy sencillo, nos da igual hacerlo de una forma u otra, pero cuando tenga sistemas más grandes, nos va a interesar usar bases ortonormales.

* EJERCICIO: Buscar la mejor aproximación en \mathcal{P}_0 de la función:

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1]$$

\mathcal{P}_0 = Espacio de las constantes.

con las siguientes definiciones de distancia:

$$a) \quad d(g, h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) \neq h(x) \text{ para algún } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } g(x) = h(x) \quad \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

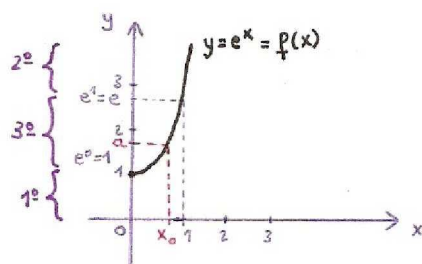
$$u(x) \in \mathcal{P}_0 \quad u(x) = \text{cte} = a$$

$$d(f, u) \leq d(f, v) \quad \forall v \in \mathcal{P}_0$$

$$a \in \mathcal{P}_0, \quad e^x = a \text{ para algún } x \in [0, 1] \Rightarrow d(f, u) = 1 \quad \forall u \in \mathcal{P}_0$$

$$u(x) = a \text{ mejor aprox. de } f(x) = e^x \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \quad d(g, h) = \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx = \|g(x) - h(x)\|_1$$



$$d(e^x, a) = \int_0^1 |e^x - a| dx \quad f(x) = e^x \quad [0, 1]$$

¿a? $d(e^x, a)$ sea mínima.

Para integrar debemos quitar el valor absoluto:

$$|e^x - a|$$

$$1^o) \quad a \leq 1 = e^0 \leq e^x \rightarrow e^x - a \geq 0$$

$$d(e^x, a) = \int_0^1 (e^x - a) dx = \left[e^x - ax \right]_0^1 = \underset{a \leq 1}{e - a - 1} \geq e - 1 - 1 = e - 2 = d(e^x, 1) \simeq 0.718$$

$$\boxed{d(e^x, a) \geq e - 2}$$

$$2^o) \quad a \geq e = e^1 \geq e^x \quad \forall x \in [0, 1] \rightarrow |e^x - a| = a - e^x$$

$$d(e^x, a) = \int_0^1 (a - e^x) dx = \left[ax - e^x \right]_0^1 = a - e + 1 \geq e - e + 1 = 1 = d(e^x, e)$$

$$\boxed{d(e^x, a) \geq 1 = d(e^x, e)}$$

$$3^o) \quad 1 < a < e \rightarrow \exists x_0 \in [0, 1] / a = e^{x_0}$$

$$|e^x - a| = |e^x - e^{x_0}| = \begin{cases} e^x - e^{x_0} & , x \geq x_0 \\ e^{x_0} - e^x & , x \leq x_0 \end{cases} \rightarrow \text{Tendremos 2 zonas en el intervalo } [0, 1].$$

$$\begin{aligned}
 d(e^x, a) &= \int_0^1 |e^x - a| dx = \int_0^{x_0} (a - e^x) dx + \int_{x_0}^1 (e^x - a) dx = \\
 &= a x_0 - e^{x_0} \Big|_0^{x_0} + e^x - a x \Big|_{x_0}^1 = (a x_0 - e^{x_0} + 1) + (e - a - e^{x_0} + a x_0) = \\
 &= e^{x_0} \cdot x_0 - e^{x_0} + 1 + e - e^{x_0} - e^{x_0} + e^{x_0} \cdot x_0 = (x_0 + x_0 - 1 - 1 - 1) e^{x_0} + (1 + e) = \\
 &= (2x_0 - 3) e^{x_0} + (1 + e) \quad 0 < x_0 < 1 \quad \dot{x}_0? \text{ para que } d(e^x, a) \\
 &\quad \text{sea mínima.}
 \end{aligned}$$

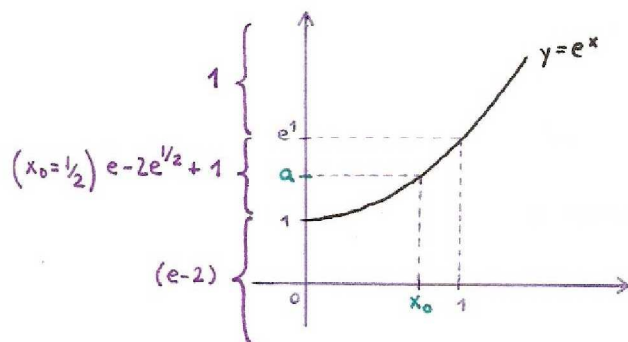
$$d(e^x, a) = (2x_0 - 3) e^{x_0} + (1 + e) \rightarrow \text{Minimizar esto.}$$

$$y = (2x - 3) e^x + (1 + e)$$

$$\begin{aligned}
 y' &= 2e^x + (2x - 3) e^x = (2x - 1) e^x = 0 ; \quad x = \frac{1}{2} \\
 y'' &= 2e^x + (2x - 1) e^x = (2x + 1) e^x
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} y' &= 2e^x + (2x - 3) e^x = (2x - 1) e^x = 0 ; \quad x = \frac{1}{2} \\ y'' &= 2e^x + (2x - 1) e^x = (2x + 1) e^x \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Mínimo en } x = \frac{1}{2} \\ \downarrow \end{array}$$

Mínimo de $d(e^x, a)$ en $x_0 = \frac{1}{2}$

$$d(e^x, \frac{1}{2}) = (1 - 3) e^{1/2} + 1 + e = e - 2e^{1/2} + 1$$



distancias

Quiero el mínimo de estas 3 posibilidades:

$$e - 2 < 1$$

$$\dot{x} \quad e - 2e^{1/2} + 1 \leq e - 2? \quad -2e^{1/2} \leq -3 ; \quad e^{1/2} \geq \frac{3}{2} ; \quad e \geq \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

Es cierto

$$\text{Mejor aprox: } a = e^{1/2} = \sqrt{e} \quad \text{con } x_0 = \frac{1}{2}$$

7. MEJOR APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS.

* CASO CONTÍNUO. - Caso de mejor aproximación en el que:

$E = C([a, b]) \rightarrow E$ es el espacio de funciones continuas en $[a, b]$.

$H \rightarrow$ Polinomios de grado $\leq n$, funciones trigonométricas, funciones racionales...
(Subespacio de E).

La distancia usada entre funciones es del tipo:

$$d(f, g) = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \cdot w(x) dx$$

Dicha distancia proviene del producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$$

Y este producto da lugar a la norma:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) w(x) dx$$

$w(x)$ = FUNCIÓN PESO

$w(x) \geq 0 \quad \forall x$

(pero que no sea siempre 0, que se me anula la \int).

La aproximación que resulta con el uso de la distancia $d(f, g)$ que acabamos de definir recibe el nombre de APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS, al tratar de minimizar la integral del cuadrado de la diferencia entre las funciones (con un posible peso $w(x) \geq 0$) en el intervalo $[a, b]$.

Por ejemplo:

$$H = \mathcal{P}_n$$

$$\mathcal{B} = \{p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)\}$$

BASE DE POLINOMIOS
ORTOGONALES.

$$\{1, x, \dots, x^n\} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$$

$$\langle p_i, p_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

¡IMPORTANTE!

→ Ampliación del caso discreto → Pág. 66

* CASO DISCRETO. - Caso de mejor aproximación donde no nos interesa minimizar la distancia entre dos funciones en todo un intervalo $[a, b]$ (caso continuo), sino sólo en algunos puntos.

Ahora E no será un espacio de funciones, sino de sucesiones:

$$\begin{array}{c} f(x_1) \quad f(x_2) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \vec{f} \equiv (f_1, f_2, \dots) \end{array} \quad \vec{g} \equiv (g_1, g_2, \dots) \quad w = (w_1, w_2, \dots) \quad w_i \geq 0 \quad \forall i$$

Producto escalar : $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot g_i \cdot w_i$

Norma : $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad ; \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \cdot w_i$

Distancia : $d(f, g) = \|f - g\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (f_i - g_i)^2 w_i \right)^{1/2}$

* PROBLEMA. - Encontrar el polinomio de 2º grado que mejor aproxima en el sentido de mínimos cuadrados a la función $f(x) = \sin \pi x$ en el intervalo $[0, 1]$. → (caso continuo)

$$E = C[0, 1]$$

$$\langle g, h \rangle = \int_0^1 g(x) \cdot h(x) dx$$

SI NO NOS DICEN NADA,
ENTONCES $w(x) = 1$

$$H = \mathcal{P}_2 \quad u(x) \in H$$

$$u(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mejor aproximación de } f(x) = \sin \pi x$$

Polinomio que estamos buscando (por los teoremas estudiados sabemos que $u(x)$ existe y que es única).

1ª FORMA

→ Utilizando una base no ortogonal.

$$B = \{1, x, x^2\} \rightarrow \text{Base de } H$$

Por el Teorema de la Proyección Ortogonal:

$$u(x) \text{ mejor aprox. de } f(x) \Leftrightarrow \langle f - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$$

$$\langle \sin \pi x - (ax^2 + bx + c), x^i \rangle = 0 \quad i = 0, 1, 2$$

$$\langle ax^2 + bx + c, x^i \rangle = \langle \sin \pi x, x^i \rangle ;$$

$$a \langle x^2, x^i \rangle + b \langle x, x^i \rangle + c \langle 1, x^i \rangle = \langle \sin \pi x, x^i \rangle$$

↳ Escribimos esto en términos de integrales, es decir, calculamos los productos según el $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido.

$$i = 0 \rightarrow a \cdot \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx + b \cdot \int_0^1 x \cdot 1 dx + c \cdot \int_0^1 1 dx = \int_0^1 (\sin \pi x) dx$$

$$i = 1 \rightarrow a \cdot \int_0^1 x^2 \cdot x dx + b \cdot \int_0^1 x \cdot x dx + c \cdot \int_0^1 1 \cdot x dx = \int_0^1 (\sin \pi x) \cdot x dx$$

$$i = 2 \rightarrow a \cdot \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx + b \cdot \int_0^1 x \cdot x^2 dx + c \cdot \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \int_0^1 (\sin \pi x) \cdot x^2 dx$$

Resolver este sistema de 3 ecuaciones

Vamos a ver otra manera de resolverlo...

2^a FORMA

→ Utilizando una base ortogonal.

Ahora la dificultad estará en hallar la base, pero el sistema será muy sencillo.

¿Cómo hallamos la base ortogonal de H ?

$$\{1, x, x^2\}$$

$$B = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$$

→ Polinomio de grado 0 = cte

→ Polinomio de grado 1

→ Polinomio de grado 2.

Al primer vector le puedo poner el valor que quiera, así que le pongo 1.

$$p_0(x) = 1$$

Para calcular el segundo vector hay que exigir que sea \perp a $p_0(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = \alpha x + \beta \\ \langle p_0, p_1 \rangle = 0 \end{array} \right\} \quad \langle 1, \alpha x + \beta \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle 1, \alpha x + \beta \rangle &= \int_0^1 1 \cdot (\alpha x + \beta) dx = \alpha \int_0^1 x dx + \beta \int_0^1 dx = \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + \beta \cdot x \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\alpha}{2} + \beta = 0 \quad ; \quad \alpha = -2\beta \end{aligned}$$

$$p_1(x) = -2\beta \cdot x + \beta$$

↳ Puedo ponerle cualquier valor a β ($\neq 0$)

$$\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow p_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

El tercer vector debe ser \perp al primero y al segundo:

$$p_2(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta x + \gamma$$

$$\langle p_0, p_2 \rangle = 0 \rightarrow \langle 1, \alpha x^2 + \beta x + \gamma \rangle = \int_0^1 1 \cdot (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx =$$

$$= \alpha \int_0^1 x^2 dx + \beta \int_0^1 x dx + \gamma \int_0^1 dx = \alpha \cdot \frac{x^3}{3} + \beta \cdot \frac{x^2}{2} + \gamma \cdot x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle = 0 \rightarrow \langle x - \frac{1}{2}, \alpha x^2 + \beta x + \gamma \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx =$$

$$= \alpha \int_0^1 x^3 dx + \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \int_0^1 x^2 dx + \left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) \int_0^1 x dx - \frac{\gamma}{2} \int_0^1 dx =$$

$$= \alpha \cdot \frac{x^4}{4} + \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{x^3}{3} + \left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{\gamma}{2} \cdot x \Big|_0^1 = \dots =$$

$$= \frac{1}{12} \alpha + \frac{1}{12} \beta = 0 \quad (\times 12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{array} \right\} \alpha = -\beta ; \quad \gamma = -\frac{\beta}{6}$$

$$p_2(x) = -\beta \cdot x^2 + \beta \cdot x - \frac{\beta}{6}$$

$$\beta = -1 \rightarrow$$

$$p_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Base ortogonal de H calculada \rightarrow

$$B = \left\{ 1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\}$$

En cuanto a las bases, no existe unicidad (una sola base posible), sino que podemos hallar distintas bases multiplicando los vectores por algún valor. Por tanto, nos sirve cualquier base B en la que $p_0(x)$ sea proporcional a 1, $p_1(x)$ proporcional a $x - \frac{1}{2}$ y $p_2(x)$ proporcional a $x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Sea $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot w(x) dx \Rightarrow$ Familia $\{P_n\}$ de Polinomios Ortogonales.

FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES:

Una base ortogonal para un cierto producto escalar cuando se considera el subespacio \mathcal{P}_n .

Una vez que ya tenemos la base, se escribe la mejor aproximación en función de los vectores de la base del espacio H al que pertenece:

$$u(x) = A \cdot 1 + B \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + C \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \quad \text{¿A, B, C?}$$

Sabemos que la solución existe y es única. Vamos a hallarla utilizando el Teorema de la Proyección Ortogonal:

$$u(x) \text{ mejor aprox. de } f \Leftrightarrow \langle f - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{P}_2$$

$$\langle f - u, v \rangle = 0 \quad , \quad v(x) = 1 \quad , \quad v(x) = x - \frac{1}{2} \quad , \quad v(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\downarrow$$

$$\langle u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad v(x) = 1 \quad , \quad v(x) = x - \frac{1}{2} \quad , \quad v(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Construimos el sistema (aunque, al ser base ortogonal, hay una fórmula directa para hallar A, B y C).

$$\langle A \cdot 1 + B \left(x - \frac{1}{2}\right) + C \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right), v \rangle = \underbrace{\langle \text{sen } \pi x, v \rangle}_f$$

$$v(x) = 1 \rightarrow A \langle 1, 1 \rangle + B \langle x - \frac{1}{2}, 1 \rangle + C \langle x^2 - x + \frac{1}{6}, 1 \rangle = \langle \sin \pi x, 1 \rangle$$

$$v(x) = x - \frac{1}{2} \rightarrow A \langle 1, x - \frac{1}{2} \rangle + B \langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle + C \langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x - \frac{1}{2} \rangle = \langle \sin \pi x, x - \frac{1}{2} \rangle$$

$$v(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \rightarrow A \langle 1, x^2 - x + \frac{1}{6} \rangle + B \langle x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6} \rangle + C \langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \rangle = \langle \sin \pi x, x^2 - x + \frac{1}{6} \rangle$$

Se anulan porque son ortogonales
(son vectores de la base B).

$$A \langle 1, 1 \rangle = \langle \sin \pi x, 1 \rangle$$

$$B \langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle = \langle \sin \pi x, x - \frac{1}{2} \rangle$$

$$C \langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \rangle = \langle \sin \pi x, x^2 - x + \frac{1}{6} \rangle$$

Fórmula directa (recordatorio):

$$u(x) = \sum_{i=0}^2 \frac{\langle f, p_i \rangle}{\|p_i\|^2} \cdot p_i$$

SUMA DE FOURIER

$$\|p_i\|^2 = \langle p_i, p_i \rangle$$

$\langle p_i, p_i \rangle = 1 \Rightarrow$ Norma = 1 \Rightarrow **POLINOMIOS ORTONORMALES**
(SON ÚNICOS)

$$B = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$$

$$B = \{\alpha p_0(x), \beta p_1(x), \gamma p_2(x)\} \quad \|\alpha p_0\| = \|\beta p_1\| = \|\gamma p_2\| = 1$$

BASES ORTOGONALES \rightarrow NO HAY UNICIDAD
BASES ORTONORMALES \rightarrow SÍ HAY UNICIDAD

* PROBLEMA:

Hallar la expresión del polinomio trigonométrico: $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ que mejor aproxime en el sentido de mínimos cuadrados a la función $f(x) = x$ ($y=x$) en el intervalo $I = [-\pi, \pi]$.

$C[-\pi, \pi] = E =$ Espacio de funciones.

Queremos algo de este tipo $\rightarrow a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$

Sentido de mínimos cuadrados $\rightarrow \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \quad (w(x)=1)$

$H \equiv$ Subespacio generado por $B = \{1, \cos x, \sin x\}$

$$\langle u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

$$\langle a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x, 1 \rangle = \langle \overset{f}{x}, 1 \rangle$$

$$\langle a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x, \cos x \rangle = \langle x, \cos x \rangle$$

$$\langle a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x, \sin x \rangle = \langle x, \sin x \rangle$$

} Resolverlo

Problemas de las hojas recomendados: 2, 3, 4, 6, 7.

de examen

Relacionado con lo de hoy, pero más general.

(18/12/2007)

8. ERROR CON MEJOR APROXIMACIÓN.

E espacio euclídeo $\langle \cdot, \cdot \rangle$
 H subespacio de E , $\dim H = n < \infty$ }

$\forall f \in E$, \exists única u mejor aproximación de f .

$$u \sim f$$

Sabemos que la mejor aproximación es el elemento de H que minimiza la distancia a f . Salvo en el caso trivial, cuando f pertenezca a H y su mejor aprox. sea ella misma, no eliminamos por completo la distancia entre f y u . Dicha distancia será lo que se denominará ERROR EN LA MEJOR APROXIMACIÓN. Evidentemente, para cualquier otro elemento que no sea u , el error será mayor.

$$\|f - u\| = \sqrt{\|f\|^2 - \|u\|^2}$$

EXPRESIÓN DEL ERROR.

$$\begin{aligned} (\text{Error})^2 &= d(f, u)^2 = \|f - u\|^2 = \langle f - u, f - u \rangle = \langle f - u, f \rangle - \cancel{\langle f - u, u \rangle}^0 = \\ &= \langle f - u, f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle u, f \rangle = \|f\|^2 - \langle u, f \rangle = \\ &= \|f\|^2 - \langle u, (f - u) + u \rangle = \|f\|^2 - \cancel{\langle u, f - u \rangle}^0 - \langle u, u \rangle = \\ &= \|f\|^2 - \|u\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

↑ suma y resta u (son \perp)

$$\|f\| \geq \|u\|$$

9. MEJOR APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS (CASO DISCRETO).

$$E = \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N} \quad \dim \mathbb{R}^m = m$$

$$m = \pm \infty \rightarrow \mathbb{R}^{+\infty} \equiv \text{Sucesiones}$$

$$\left. \begin{array}{l} H \text{ subespacio de } \mathbb{R}^m \\ \dim H = n < \infty \end{array} \right\}$$

$$f \in E, f(g_1, g_2, \dots, g_m) \quad g_i \in \mathbb{R}$$

$$g(g_1, g_2, \dots, g_m)$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^m g_i \cdot g_i \cdot w_i$$

$$w = (w_1, \dots, w_m) \quad w_i \geq 0 \quad i = 1..m$$

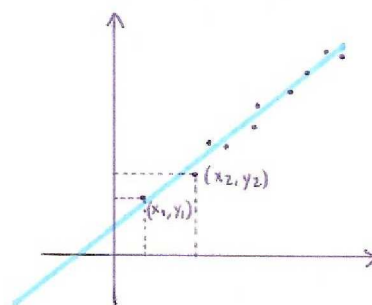
↑ Vector de pesos

* EJEMPLO:

Nos dan una serie de datos:

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
\vdots	\vdots
x_n	y_n

Gráficamente:



$$y = Ax + B$$

¿A, B?

→ Quiero hallar la RECTA que mejor aproxime estos puntos, que más se parezca a ellos.

Quiero que los puntos que me dan como datos estén sobre la recta:

$$\left. \begin{array}{l} Ax_1 + B = y_1 \\ Ax_2 + B = y_2 \\ \vdots \\ Ax_n + B = y_n \end{array} \right\} \text{ Equivale a: } A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\parallel v_1} + B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\parallel v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\parallel f}$$

¿Quiénes son A y B tales que $Av_1 + Bv_2 = f$?

$$\rightarrow \underline{Av_1 + Bv_2 - f = 0}$$

Quiero que $\| \underbrace{Av_1 + Bv_2}_u - f \|$ sea lo menor posible, lo más próximo a 0.

Es decir, estoy buscando u, que es la mejor aproximación de f.

La mejor aproximación será del tipo:

$$u = Av_1 + Bv_2$$

v_1 y v_2 los conocemos.

u es combinación lineal de los vectores v_1 y $v_2 \rightarrow H$ es el subespacio generado por v_1 y v_2 .

$$\langle g, h \rangle = \sum_{i=1}^n g_i h_i \quad (w_i = 1 \ \forall i \text{ porque no nos dicen nada sobre la función peso}).$$

$$\left. \begin{array}{l} g = (g_1, \dots, g_n) \\ h = (h_1, \dots, h_n) \end{array} \right\}$$

$$\|g\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n g_i^2}$$

$\dim H = 2$ (porque está generado por 2 vectores).

$$E = \mathbb{R}^n$$

Por el teorema estudiado, sabemos que existe u y que es única.

Por el Teorema de la Proyección Ortogonal:

$$u = Av_1 + Bv_2 \text{ es mejor aprox. sii } \langle f-u, v_1 \rangle = \langle f-u, v_2 \rangle = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \langle f-u, v_1 \rangle &= 0 \rightarrow \langle u, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \\ \langle f-u, v_2 \rangle &= 0 \rightarrow \langle u, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \langle u, v_1 \rangle &= \langle f, v_1 \rangle \rightarrow \langle Av_1 + Bv_2, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \\ \langle u, v_2 \rangle &= \langle f, v_2 \rangle \rightarrow \langle Av_1 + Bv_2, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \end{aligned} \right\} \text{ Descomponiendo el producto, obtengo:}$$

$$\left. \begin{aligned} A \langle v_1, v_1 \rangle + B \langle v_2, v_1 \rangle &= \langle f, v_1 \rangle \\ A \langle v_1, v_2 \rangle + B \langle v_2, v_2 \rangle &= \langle f, v_2 \rangle \end{aligned} \right\}$$

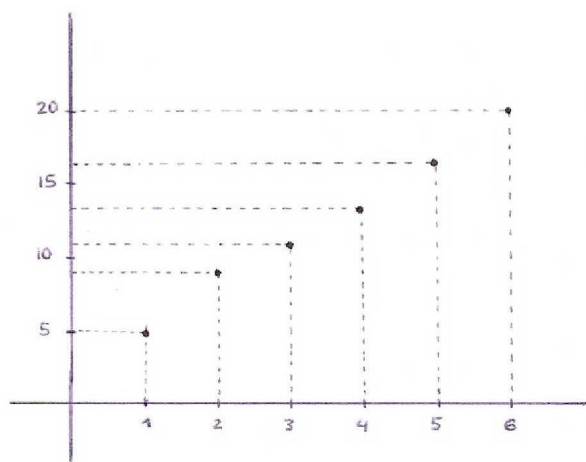
Resolver $\rightarrow A, B$

Hemos pasado así de un sistema que no se podía resolver (no tenía solución porque no hay ninguna recta que pase por todos los puntos (x, y)) a un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas que sí tiene solución y que nos dará la mejor aproximación.

* PROBLEMA 8:

Encontrar la recta de mínimos cuadrados que se ajusta a los datos siguientes:

x	1	2	3	4	5	6
y	5'04	8'12	10'64	13'18	16'20	20'04



Por la gráfica parece que si están más o menos alineados.

$y = Ax + B$ → Recta que quiero hallar.

Quiero que la recta pase por los puntos dados:

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot 1 + B = 5'04 \\ A \cdot 2 + B = 8'12 \\ A \cdot 3 + B = 10'64 \\ A \cdot 4 + B = 13'18 \\ A \cdot 5 + B = 16'20 \\ A \cdot 6 + B = 20'04 \end{array} \right\} \text{Vectorialmente: } A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_1} + B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5'04 \\ 8'12 \\ 10'64 \\ 13'18 \\ 16'20 \\ 20'04 \end{pmatrix}}_f$$

La mejor aproximación de f será de la forma:

$u = Av_1 + Bv_2$

T^a Proj. Ortogonal: $u = Av_1 + Bv_2$ es mejor aprox. $\Leftrightarrow \langle f-u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$

$$\left. \begin{aligned} \langle f-u, v_1 \rangle = 0 &\rightarrow \langle u, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \rightarrow \langle Av_1 + Bv_2, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \\ \langle f-u, v_2 \rangle = 0 &\rightarrow \langle u, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \rightarrow \langle Av_1 + Bv_2, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A \langle v_1, v_1 \rangle + B \langle v_2, v_1 \rangle &= \langle f, v_1 \rangle \\ A \langle v_1, v_2 \rangle + B \langle v_2, v_2 \rangle &= \langle f, v_2 \rangle \end{aligned} \right\} \text{ Sistema para resolver.}$$

Calculamos los productos según lo definido: $\langle g, h \rangle = \sum_{i=1}^n g_i h_i$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

$$\langle f, v_1 \rangle = 1 \cdot 5'04 + 2 \cdot 8'12 + 3 \cdot 10'64 + 4 \cdot 13'18 + 5 \cdot 16'20 + 6 \cdot 20'04$$

$$\langle f, v_2 \rangle = 1 \cdot 5'04 + 1 \cdot 8'12 + 1 \cdot 10'64 + 1 \cdot 13'18 + 1 \cdot 16'20 + 1 \cdot 20'04$$

Se sustituyen estos valores en el sistema y ya podemos despejar los valores de A y B.

10. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS INCOMPATIBLES.

Nos dan un sistema sobredeterminado; es decir, al principio (con las primeras ecuaciones) es compatible y luego, al ir añadiendo más, se vuelve incompatible.

Como los sistemas incompatibles no tienen solución, buscaremos una pseudosolución, que es lo más parecido.

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sistema incompatible.} \\ \text{Buscar pseudosolución.} \end{array}$$

Primero escribimos el sistema de forma vectorial:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad n < m$$

$\underbrace{\quad}_{v_1} \quad \underbrace{\quad}_{v_2} \quad \underbrace{\quad}_{v_n} \quad \underbrace{\quad}_{f}$

¿ x_1, x_2, \dots, x_n ? ($n < m$)

$$E = \mathbb{R}^m$$

La mejor aproximación que estamos buscando tiene la forma:

$$u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad u \sim f$$

Los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ generan un espacio H cuya dimensión será $\leq n$ (hay que quedarnos con los v_i linealmente independientes y eliminar los que son combinación lineal). Una vez que tenga una base de H tendré las condiciones necesarias para resolver el problema.

Tª P. Ortogonal: $u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ es mejor aprox. $\Leftrightarrow \langle f - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$

$$\langle f - u, v_i \rangle = 0 \rightarrow \langle u, v_i \rangle = \langle f, v_i \rangle \rightarrow \langle x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v_i \rangle = \langle f, v_i \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + x_n \langle v_n, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \\ \vdots \\ x_n \langle v_1, v_n \rangle + \dots + x_n \langle v_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sistema a resolver.} \\ \downarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{array}$$

* PROBLEMA 9:

Probar que el sistema $Ax = b$ es incompatible.

Hallar la solución $X = (x, y, z)^T$ en el sentido de mínimos cuadrados.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible $\Leftrightarrow Rg A = Rg \bar{A}$

El rango de A como mucho puede ser 3.

El rango de \bar{A} puede ser 4. Vamos a calcularlo.

$$|\bar{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 2 \neq 0 \Rightarrow Rg \bar{A} = 4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow Rg A = 3$$

$Rg A \neq Rg \bar{A}$

↓
INCOMPATIBLE

Queremos hallar la pseudosolución: $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$Ax = b \rightarrow \left. \begin{array}{rcl} x & - & z = 1 \\ x + 2y + z & = & 1 \\ x + y - 3z & = & 1 \\ y + z & = & 1 \end{array} \right\} \rightarrow x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} + z \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_f$$

¿x, y, z?

H = Subespacio generado por $\{v_1, v_2, v_3\} \rightarrow \dim H = 3 \quad \mathbb{R}^4$ (A tiene 4 filas)

$$u = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

$$u \simeq f$$

Tª Proyección Ortogonal:

$$\left. \begin{array}{l} x \langle v_1, v_1 \rangle + y \langle v_2, v_1 \rangle + z \langle v_3, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle \\ x \langle v_1, v_2 \rangle + y \langle v_2, v_2 \rangle + z \langle v_3, v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle \\ x \langle v_1, v_3 \rangle + y \langle v_2, v_3 \rangle + z \langle v_3, v_3 \rangle = \langle f, v_3 \rangle \end{array} \right\} \text{ Sistema a resolver.}$$

Calculamos los $\langle \cdot, \cdot \rangle$ según lo definido: $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^m f_i \cdot g_i$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 3$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = 0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = -3$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 0$$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = (-1)^2 + 1^2 + (-3)^2 + 1^2 = 12$$

$$\langle f, v_1 \rangle = 3 \quad ; \quad \langle f, v_2 \rangle = 4 \quad ; \quad \langle f, v_3 \rangle = -2$$

Por lo tanto, el sistema queda de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x + 3y - 3z & = & 3 \\ 3x + 6y & = & 4 \\ -3x & + & 12z = -2 \end{array} \right\} \quad x = \frac{2}{3} \quad y = \frac{1}{3} \quad z = 0$$

La mejor aproximación es:

$$u = x v_1 + y v_2 + z v_3 = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución } \underline{\bar{X}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)^T$$

$$A \cdot \underline{\bar{X}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

* PROBLEMA 6.

EXAMEN RECIENTE.

Sea la función:

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^2 x(x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma)^2 dx \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

la "x" no es una variable porque al integrar respecto a ella desaparecerá.

- (a) Determinar α, β, γ de forma que la expresión se minimice. Calcular dicho mínimo.

↓
Mínimos cuadrados

Quiero conseguir algo parecido a: $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \cdot w(x) dx = d(f, g)$

↓
Esto es lo que minimizamos al hallar la mejor aprox. por mínimos cuadrados.

$$(x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma) \rightarrow \underbrace{x^3}_{f(x)} - \underbrace{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}_{u(x)}$$

$$\int_0^2 x(f(x) - u(x))^2 dx = \underbrace{\|f(x) - u(x)\|^2}_{\text{mínimo}} = \langle f - u, f - u \rangle$$

$$E = C[0, 2] \rightarrow \text{Funciones continuas en el intervalo } [0, 2]$$

$$u \in H = \mathcal{P}_2 \quad \dim \mathcal{P}_2 = 3$$

$$\langle g, h \rangle = \int_0^2 x g(x) h(x) dx$$

↙ función peso

$u(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es mejor aproximación de $f(x) = x^3$ en \mathcal{P}_2 .

$$H = \mathcal{P}_2 \rightarrow \text{Base de } H = \left\{ \underset{\substack{\parallel \\ v_3}}{1}, \underset{\substack{\parallel \\ v_2}}{x}, \underset{\substack{\parallel \\ v_1}}{x^2} \right\}$$

Por el Teorema de la Proyección Ortogonal:

$$\langle u, v_i \rangle = \langle g, v_i \rangle \quad i = 1, 2, 3$$

los 3 vectores de la base de H .

$$\left. \begin{aligned} \alpha \langle x^2, 1 \rangle + \beta \langle x, 1 \rangle + \gamma \langle 1, 1 \rangle &= \langle x^3, 1 \rangle \\ \alpha \langle x^2, x \rangle + \beta \langle x, x \rangle + \gamma \langle 1, x \rangle &= \langle x^3, x \rangle \\ \alpha \langle x^2, x^2 \rangle + \beta \langle x, x^2 \rangle + \gamma \langle 1, x^2 \rangle &= \langle x^3, x^2 \rangle \end{aligned} \right\} \text{ Sistema a resolver.}$$

Calculamos los $\langle \cdot, \cdot \rangle$ según lo definido:

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^2 x \cdot x^2 dx = \langle 1, x^2 \rangle = \langle x, x \rangle = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{2^4}{4} = 2^2 = 4$$

$$\langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle = \int_0^2 x \cdot x dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = \frac{2^2}{2} = 2$$

$$\langle x^3, 1 \rangle = \int_0^2 x \cdot x^3 dx = \langle 1, x^3 \rangle = \langle x, x^2 \rangle = \langle x^2, x \rangle = \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 = \frac{2^5}{5}$$

$$\langle x^3, x \rangle = \int_0^2 x \cdot x \cdot x^3 dx = \langle x, x^3 \rangle = \langle x^2, x^2 \rangle = \left. \frac{x^6}{6} \right|_0^2 = \frac{2^6}{6} = \frac{32}{3}$$

$$\langle x^3, x^2 \rangle = \int_0^2 x \cdot x^2 \cdot x^3 dx = \left. \frac{x^7}{7} \right|_0^2 = \frac{2^7}{7}$$

Sustituimos en el sistema y se obtienen α, β, γ .

Suponiendo que ya hemos calculado los valores de α, β, γ , ahora podemos calcular el valor del mínimo que nos pedían:

$$\int_0^2 x (x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma)^2 dx = \|x^3 - u(x)\|^2 = \|x^3\|^2 - \|u(x)\|^2 \equiv \underline{\text{Mínimo}}$$

$$\|x^3\|^2 = \int_0^2 x (x^3)^2 dx = \langle x^3, x^3 \rangle = \frac{2^8}{2^3} = 2^5$$

$$\|u(x)\|^2 = \int_0^2 x (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 dx$$

* PROBLEMA 2:

Se considera el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 de pares de puntos reales con el producto escalar:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \frac{x_1 y_1}{\alpha^2} + \frac{x_2 y_2}{\beta^2}, \quad \bar{x} = (x_1, x_2), \quad \bar{y} = (y_1, y_2)$$

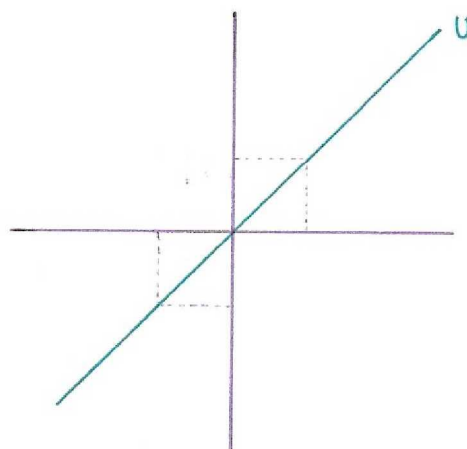
Subespacio $\rightarrow U = \{u = (s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ (Las coordenadas coinciden).

- (a) Discutir existencia y unicidad (y en su caso hallar) de la mejor aprox. en U a un vector \bar{x} cualquiera de \mathbb{R}^2 .

Base de $U \rightarrow \underline{B = \{(1, 1)\}}$

$$u = (s, s) = s(1, 1)$$

u mejor aprox. de $\bar{x} = (x_1, x_2)$



Por el T^a Proyección Ortogonal \rightarrow

$$\langle \bar{x} - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in U$$

$$\langle \bar{x} - u, (1,1) \rangle = 0 ;$$

$$\langle \bar{x}, (1,1) \rangle = \langle u, (1,1) \rangle \rightarrow \langle \bar{x}, (1,1) \rangle = \underline{s} \langle (1,1), (1,1) \rangle$$

$$\langle \bar{x}, (1,1) \rangle = \frac{x_1}{\alpha^2} + \frac{x_2}{\beta^2} = s \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \rightarrow s = \frac{\frac{x_1}{\alpha^2} + \frac{x_2}{\beta^2}}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}} = \frac{\beta^2 x_1 + \alpha^2 x_2}{\beta^2 + \alpha^2}$$

$$u = \left(\frac{\beta^2 x_1 + \alpha^2 x_2}{\beta^2 + \alpha^2}, \frac{\beta^2 x_1 + \alpha^2 x_2}{\beta^2 + \alpha^2} \right)$$

b) $U' = \{ u = (s, s+1) \mid s \in \mathbb{R} \}$

$$(s, s+1) + (s, s+1) = (2s, 2s+2) \rightarrow$$

U' no es subespacio: al sumar 2 elementos de un espacio, el resultado debe estar también dentro del espacio.

Nos tendría que haber quedado: (algo, algo + 1).

\mathbb{R}^2

$$\| \bar{x} - u \|^2 \text{ mínima, donde } u = (s, s+1)$$

\downarrow

$$\langle \bar{x} - u, \bar{x} - u \rangle \quad \boxed{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = (x_1, x_2) \\ u = (s, s+1) \end{array} \right\} \bar{x} - u = (x_1 - s, x_2 - s - 1) \quad \boxed{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \| \bar{x} - u \|^2 = \langle \bar{x} - u, \bar{x} - u \rangle = \frac{(x_1 - s)^2}{\alpha^2} + \frac{(x_2 - s - 1)^2}{\beta^2} = g(s) \end{array}$$

Minimizar (x_1, x_2 fijos \rightarrow Encontrar s).

$$g(s) = \frac{(x_1 - s)^2}{\alpha^2} + \frac{(x_2 - s - 1)^2}{\beta^2}$$

$$g'(s) = \frac{-2(x_1 - s)}{\alpha^2} - \frac{2(x_2 - s - 1)}{\beta^2} = 0 \quad \times (-2)$$

$$\beta^2(x_1 - s) + \alpha^2(x_2 - s - 1) = 0; \quad \beta^2 x_1 + \alpha^2(x_2 - 1) = (\beta^2 + \alpha^2)s$$

$$s = \frac{\beta^2 x_1 + \alpha^2(x_2 - 1)}{\beta^2 + \alpha^2}$$

$$g''(s) = \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\beta^2} > 0 \rightarrow \text{Es m\u00ednimo } \forall \alpha, \beta$$

La mejor aproximaci\u00f3n ser\u00e1:

$$u = \left(\frac{\beta^2 x_1 + \alpha^2(x_2 - 1)}{\beta^2 + \alpha^2}, \frac{\beta^2 x_1 + \alpha^2(x_2 - 1)}{\beta^2 + \alpha^2} + 1 \right)$$